



PSIQUE ACADÉMICA · LECTURA DE CIMENTACIÓN

Fundamentos formales del experimento aleatorio, el espacio muestral y el álgebra de eventos en investigación psicológica

Estadística Inferencial

Sesión S01 · Experimento aleatorio, espacio muestral y eventos

01

Apertura: el experimento aleatorio como cimiento de la inferencia

Cuando una psicóloga clínica de la Universidad Nacional de Colombia registra la conducta de un paciente con insomnio durante catorce noches consecutivas, no sabe de antemano si la persona logrará conciliar el sueño antes de los veinte minutos o si se levantará tres veces entre las tres y las cinco de la madrugada. Cada noche constituye, en términos formales, un experimento aleatorio: un procedimiento cuyo resultado individual es incierto, pero cuyo conjunto completo de posibles resultados se puede enumerar con anticipación. Esta noción, aparentemente sencilla, sostiene toda la arquitectura de la estadística inferencial contemporánea y permite transformar observaciones clínicas dispersas en evidencia reproducible que pueda someterse al escrutinio editorial, institucional y ético de la comunidad académica regional.

La psicología académica latinoamericana, desde los ensayos aleatorizados de intervenciones breves del Instituto Nacional de Psiquiatría Ramón de la Fuente Muñiz en Ciudad de México hasta los tamizajes escolares coordinados por el Instituto Colombiano para la Evaluación de la Educación (ICFES) en Bogotá y Medellín, ha adoptado este marco como lenguaje común. La sesión introduce los cimientos conceptuales que Andréi Kolmogórov consolidó en mil novecientos treinta y tres cuando formalizó los tres axiomas que definen una medida de probabilidad sobre un espacio muestral, retomando el legado analítico de Pierre-Simon Laplace publicado en mil ochocientos doce, la correspondencia entre Blaise Pascal y Pierre de Fermat de mil seiscientos cincuenta y cuatro sobre el reparto de apuestas, y el tratado *Ars Conjectandi* de Jacob Bernoulli aparecido póstumamente en mil setecientos trece. También se integrará el álgebra de conjuntos formulada por Augustus De Morgan y los diagramas visuales propuestos por John Venn. Analizar un experimento aleatorio con rigor, enumerar su espacio muestral sin omisiones ni redundancias, y operar con eventos simples, compuestos, mutuamente excluyentes y complementarios no es un ejercicio escolástico: es la condición mínima para que una intervención psicológica pueda declararse eficaz con base en evidencia, y para que una tesis cumpla con los estándares de la Asociación Americana de Psicología (APA).

02

Definición formal del experimento aleatorio y sus propiedades

Un experimento aleatorio es un procedimiento bien definido que satisface tres propiedades formales: puede repetirse indefinidamente bajo las mismas condiciones esenciales, el resultado individual de cada repetición no es predecible con certeza antes de la observación,

y el conjunto de todos los resultados posibles es conocido antes de ejecutarlo. Andréi Kolmogórov, en su monografía de mil novecientos treinta y tres que estableció la axiomatización moderna de la probabilidad, denominó a este conjunto espacio muestral y exigió que sobre él se defina una sigma-álgebra de subconjuntos medibles y una medida numérica que asigne a cada subconjunto un valor entre cero y uno. Antes de Kolmogórov, Pierre-Simon Laplace había propuesto en su Teoría analítica de las probabilidades de mil ochocientos doce una concepción clásica según la cual la probabilidad de un evento equivale al cociente entre los casos favorables y los casos posibles, siempre que todos los resultados sean equiprobables. Jacob Bernoulli había demostrado en mil setecientos trece, con el teorema conocido posteriormente como ley de los grandes números en su forma débil, que la frecuencia relativa de un evento tiende a estabilizarse alrededor de su probabilidad teórica cuando el número de repeticiones crece sin cota. La correspondencia entre Blaise Pascal y Pierre de Fermat de mil seiscientos cincuenta y cuatro sobre el problema del reparto de apuestas inauguró el tratamiento combinatorio riguroso que Bernoulli sistematizó y Laplace amplió.

Un ejemplo paradigmático consiste en lanzar una moneda balanceada tres veces consecutivas: el procedimiento es repetible, el resultado individual de cada lanzamiento es incierto, y el conjunto de resultados posibles se conoce de antemano. La propiedad de repetibilidad no exige que cada ejecución produzca el mismo resultado; exige que las condiciones experimentales relevantes permanezcan invariantes en el sentido operacional definido por el protocolo. En investigación psicológica, un ensayo clínico aleatorizado conducido en la Facultad de Medicina de la UNAM para evaluar terapia cognitivo conductual frente a lista de espera constituye un experimento aleatorio siempre que el investigador especifique con precisión el procedimiento de asignación, los criterios de inclusión, la duración del seguimiento y la métrica de resultado. La imprevisibilidad individual no es ignorancia subjetiva: es una propiedad estructural del procedimiento que justifica el uso de herramientas probabilísticas formales. La Asociación Americana de Psicología, en su manual de publicaciones séptima edición, exige que los artículos reporten explícitamente el tipo de experimento, el mecanismo de aleatorización y el tamaño muestral, reconociendo que la validez de toda inferencia posterior descansa sobre la correcta definición del experimento original.

La definición también permite distinguir experimentos aleatorios de simples observaciones no sistemáticas: un registro anecdótico de tres casos clínicos no constituye experimento aleatorio porque carece de especificación previa del universo de resultados, de procedimiento replicable y de mecanismo formal de selección muestral. Una práctica recomendada consiste en redactar el protocolo experimental completo antes de recolectar un solo dato, fijando por escrito el universo de resultados, el mecanismo de asignación y los criterios de clasificación de eventos.

Construcción del espacio muestral discreto y continuo

El espacio muestral asociado a un experimento aleatorio es el conjunto exhaustivo y mutuamente excluyente de todos los resultados elementales posibles. Se denota con la letra griega omega mayúscula. Su construcción correcta constituye el primer paso crítico de cualquier análisis probabilístico, pues un espacio muestral mal enumerado arrastra errores que ninguna técnica inferencial posterior puede corregir. Existen dos grandes tipologías: espacios muestrales discretos, cuya cardinalidad es finita o infinita numerable, y espacios muestrales continuos, cuya cardinalidad corresponde a la potencia del continuo.

En el experimento de lanzar una moneda balanceada tres veces, el espacio muestral discreto tiene ocho elementos: cara cara cara, cara cara sello, cara sello cara, sello cara cara, cara sello sello, sello cara sello, sello sello cara y sello sello sello. Estos ocho resultados son mutuamente excluyentes, porque dos cualesquiera no pueden ocurrir simultáneamente en la misma ejecución, y colectivamente exhaustivos, porque su unión agota todas las posibilidades. En investigación psicológica, cuando una estudiante de la Pontificia Universidad Javeriana registra la respuesta de diez escolares bogotanos a un reactivo dicotómico de la Escala de Ansiedad Manifiesta para Niños, el espacio muestral discreto tiene dos elevado a la décima potencia igual a mil veinticuatro resultados posibles, cada uno una secuencia binaria.

Los espacios muestrales continuos aparecen cuando la variable de interés puede asumir cualquier valor en un intervalo real: tiempos de reacción en paradigmas de Stroop, latencias en tareas de memoria de trabajo, niveles de cortisol salival medidos en investigación psicofisiológica. La distinción importa porque determina qué herramienta probabilística es aplicable: funciones de masa para espacios discretos y funciones de densidad para espacios continuos. También existen espacios muestrales híbridos, parcialmente discretos y parcialmente continuos, cuando el experimento combina variables cualitativas con variables cuantitativas medidas en escalas métricas continuas. En un diseño factorial mixto conducido por el Departamento de Psicología Experimental de la Universidad de Buenos Aires, el espacio muestral puede combinar una variable dicotómica como la condición experimental asignada aleatoriamente con una variable continua como el puntaje obtenido en una tarea de atención sostenida. El principio multiplicativo, derivado de la correspondencia Pascal Fermat de mil seiscientos cincuenta y cuatro y sistematizado en el tratado de Bernoulli, facilita el cálculo de cardinalidades cuando el experimento se descompone en etapas independientes, permitiendo enunciar la cardinalidad total como producto de cardinalidades parciales.

04

Eventos: clasificación y álgebra de conjuntos

Un evento es cualquier subconjunto del espacio muestral. Los eventos se clasifican según su estructura interna y su relación con otros eventos. Un evento simple, también llamado resultado elemental, contiene un único elemento del espacio muestral: por ejemplo, obtener exactamente la secuencia cara cara cara al lanzar la moneda tres veces. Un evento

compuesto contiene más de un resultado elemental: obtener exactamente dos caras en tres lanzamientos corresponde al subconjunto formado por las secuencias cara cara sello, cara sello cara y sello cara cara, es decir, tres resultados elementales. Dos eventos son mutuamente excluyentes, o disjuntos, cuando su intersección es el conjunto vacío: obtener exactamente tres caras y obtener exactamente dos caras no pueden ocurrir en la misma ejecución del experimento. El evento complementario de un evento dado agrupa todos los resultados del espacio muestral que no pertenecen al evento original, y su probabilidad se obtiene restando de la unidad la probabilidad del evento original, una propiedad que se deduce directamente de los axiomas de Kolmogórov.

Sobre los eventos se definen tres operaciones fundamentales del álgebra de conjuntos, formalizada por Augustus De Morgan en el siglo diecinueve: la unión, que agrupa los resultados que pertenecen al menos a uno de los eventos; la intersección, que agrupa los resultados que pertenecen a ambos eventos simultáneamente; y la diferencia, que agrupa los resultados del primero que no pertenecen al segundo. Las leyes de De Morgan establecen que el complemento de una unión equivale a la intersección de los complementos, y que el complemento de una intersección equivale a la unión de los complementos, identidades que permiten simplificar cálculos probabilísticos complejos.

En un ensayo clínico aleatorizado conducido por el INAP de Argentina sobre terapia breve para trastorno de ansiedad generalizada, el evento remisión clínica al término de la intervención puede ser compuesto si la definición operacional exige simultáneamente dos condiciones: reducción de al menos cincuenta por ciento en la escala de Hamilton y ausencia de criterios diagnósticos según el Manual diagnóstico y estadístico de los trastornos mentales en su quinta edición. Ese evento compuesto es la intersección de dos eventos constitutivos. El evento recaída a seis meses es mutuamente excluyente con mantenimiento de remisión a seis meses, porque la definición clínica los opone.

Una familia de eventos se denomina partición del espacio muestral cuando sus miembros son mutuamente excluyentes dos a dos y su unión equivale al espacio muestral completo. Las particiones son fundamentales para el teorema de la probabilidad total y para el teorema de Bayes, que se estudiarán en sesiones posteriores del presente curso. En investigación psicológica clínica, una partición útil del espacio muestral de respuestas al Inventario de Depresión de Beck segunda edición agrupa los puntajes en cuatro categorías mutuamente excluyentes y exhaustivas: sintomatología mínima, leve, moderada y severa, según los umbrales validados por Aaron Beck y su equipo.

05

Representaciones gráficas: diagramas de Venn y de árbol

Las representaciones gráficas transforman el álgebra abstracta de eventos en herramientas visuales manipulables. Los diagramas de Venn, propuestos por John Venn en 1880 como extensión de círculos lógicos previos de Leonhard Euler, representan cada evento como una

región cerrada dentro de un rectángulo que simboliza el espacio muestral completo. Las intersecciones, uniones, complementos y diferencias se identifican directamente como regiones solapadas, combinadas o sustraídas. Un diagrama de tres círculos permite representar hasta ocho regiones disjuntas correspondientes a las combinaciones posibles de pertenencia o no pertenencia a tres eventos; un diagrama de cuatro círculos requiere formas elipsoidales para mantener todas las intersecciones visibles.

En investigación psicológica, un diagrama de Venn resulta especialmente útil para comunicar comorbilidades: en un estudio epidemiológico colombiano sobre depresión, ansiedad y consumo problemático de alcohol en población universitaria de Medellín y Bogotá, el diagrama muestra simultáneamente la proporción de estudiantes que presenta una sola condición, dos condiciones comórbidas o las tres condiciones en intersección triple.

Los diagramas de árbol, por su parte, son especialmente valiosos cuando el experimento aleatorio se descompone en etapas secuenciales. Cada nodo del árbol representa un punto de decisión probabilística, cada rama representa un resultado posible de esa etapa, y la concatenación de ramas desde la raíz hasta una hoja representa un resultado elemental del espacio muestral compuesto. Para el experimento de lanzar una moneda tres veces, el diagrama de árbol tiene una raíz, dos ramas en la primera etapa, cuatro ramas en la segunda y ocho hojas finales que corresponden biunívocamente a los ocho elementos del espacio muestral enumerado previamente. La enumeración sistemática mediante árboles minimiza la probabilidad de omitir resultados, error frecuente cuando el espacio muestral se construye por intuición.

06

Cierre: aplicaciones, software libre y errores frecuentes

La arquitectura conceptual del experimento aleatorio, el espacio muestral y los eventos constituye el cimiento sobre el cual descansan todas las herramientas de la estadística inferencial que el estudiante utilizará en los próximos módulos de este curso y en el ejercicio profesional posterior. Kolmogórov consolidó en 1933 lo que Laplace había esbozado en 1812 y Bernoulli en 1713, con el precedente visionario de la correspondencia Pascal Fermat de 1654; Venn y De Morgan aportaron las representaciones visuales y el álgebra de conjuntos que completan el lenguaje. La psicología latinoamericana contemporánea, en diálogo con los estándares de la APA, la ASA, la SIP y sociedades nacionales como el Colegio Colombiano de Psicólogos (COLPSIC), exige al investigador definir con precisión el procedimiento experimental, enumerar exhaustivamente el espacio muestral, clasificar los eventos relevantes y operar con ellos aplicando el álgebra de conjuntos correctamente.

El lenguaje de programación R, desarrollado originalmente por Ross Ihaka y Robert Gentleman, y Jamovi, una interfaz gráfica construida sobre R por Jonathon Love, Damian Dropmann y Ravi Selker, son gratuitas, multiplataforma y compatibles con los principios de ciencia abierta que la Sociedad Interamericana de Psicología promueve en la región. Mediante

funciones de muestreo aleatorio con o sin reemplazo, el estudiante puede generar miles de repeticiones de experimentos aleatorios y observar empíricamente la convergencia de frecuencias relativas hacia probabilidades teóricas.

Los errores más frecuentes en la definición de espacios muestrales comprometen toda la inferencia posterior y, aunque sencillos en apariencia, aparecen con regularidad preocupante en tesis de pregrado y artículos revisados por pares. El primer error consiste en omitir resultados posibles, típicamente cuando el estudiante enumera por intuición sin seguir un procedimiento sistemático como el diagrama de árbol; el espacio muestral resultante deja de ser exhaustivo, las probabilidades no suman uno y cualquier cálculo posterior queda sesgado. El segundo error consiste en incluir resultados que violan la exclusión mutua: cuando dos supuestos resultados elementales pueden ocurrir simultáneamente en una ejecución, la condición axiomática de Kolmogórov se quiebra. El tercer error confunde eventos con resultados elementales: tratar obtener al menos una cara en tres lanzamientos como un resultado elemental olvida que se trata de un evento compuesto formado por siete resultados elementales distintos. El cuarto error aplica la definición clásica laplaciana a espacios cuyos resultados no son equiprobables, asignando erróneamente probabilidades uniformes.